

УДК: 621.391

Елена Жданова,
Алла Коган,
Юрий Кулаков,
Майя Сперкач

О РАЗБИЕНИИ ГРАФА НА ПОДГРАФЫ ON THE PARTITION OF THE GRAPH INTO SUBGRAPHS

В статье рассматривается задача разбиения графа на множество подграфов с определением разреза графа и граничных вершин. Определены критерии оценки качества подразрезов и наложены некоторые ограничения (граничные условия), которые должны быть учтены при нахождении разбиения.

Ключевые слова: граф, разрез графа, подграф, разбиение графа.

Рис.: 0. Табл.: 0. Библи.: 3

In this paper we consider the problem of partitioning a graph into a set of subgraphs with the definition of a cut of the graph and border nodes. The criteria for assessing the quality of sub-divisions are defined and some restrictions (boundary conditions) imposed, which must be taken into account when finding the subdivision.

Keywords: graph, section of graph, subgraph, partition of graph.

Fig.: 0. Tabl.: 0. Bibl.: 3

Актуальность темы исследования. На сегодняшний день самыми актуальными компьютерными сетями являются беспроводные, так как дают свободу перемещений.

Вследствие увеличения объема мобильного трафика в сети, который растет в геометрической прогрессии, контролировать потоки информации становится сложнее. В свою очередь, для каждого типа трафика выдвигаются свои требования к качеству обслуживания (QoS) [1], такие как требования к пропускной способности, задержки, надежности и относительной загруженности узла.

Постановка проблемы. Возникает необходимость в разбиении беспроводной компьютерной сети на зоны маршрутизации для уменьшения времени конструирования трафика и формирования множества путей для передачи информации.

Анализ последних публикаций и исследований. В работе [1] предложен метод многоуровневого и сбалансированного распределения косвенных графов (Multi-level spectral graph partitioning method (MSGP)). Используя собственные векторы матрицы Лапласа графов, метод имеет спектральный подход, который имеет преимущество перед методами с глобальной способностью к делению. Бисекция, которая является спектральным методом, может разделить граф с помощью вектора Фидлера, а рекурсивная версия метода может быть разделена на несколько уровней.

В работе [2] предлагается подход многоуровневого разбиения сети на зоны маршрутизации, и выделяют три фазы разбиения графа: укрупнение, начальное разбиение и уточнение. Также предложена реализация алгоритма Metis на основе OpenMP и сравнение его с MPI на трех разных многоядерных архитектурах. Многопоточное деление обеспечивает более чем вдвое ускоре-

ние по сравнению с другими разбиениями, но также использует значительно меньше памяти.

В работе [3] расширяется задача разбиения графа на подграфы путем добавления произвольного количества ограничений балансировки. В работе, каждому из вершин присваивается вектор весов, и цель состоит в том, чтобы создать k -образное разбиение таким образом, чтобы разбиение удовлетворяло уравнению балансировки, связанному с каждым весом, при попытке минимизировать граничные узлы.

Выделение неисследованных частей общей проблемы. В рассмотренных способах разбиения графа на подграфы не определены критерии оценки качества подразезов сети, которое непосредственно связано с безопасностью всей сети.

Постановка задачи. Традиционные алгоритмы разбиения графов вычисляют k -образное разбиение графа таким образом, что количество ребер (разрез), минимизируется, и каждый разрез имеет равное количество граничных вершин. Задача минимизации граничного разреза может рассматриваться как цель, и требование о том, чтобы разрезы имели одинаковый размер, можно рассматривать как ограничение.

Рассмотрим неориентированный граф $G=(V,E,W,C,P)$, где V – не пустое конечное множество вершин, $V=\{1,...,n\}$, n - порядок графа; $E=\{(i,j) \in V \times V\}$ – множество ребер; $W:V \rightarrow R$ – весовая функция, которая каждой вершине ставит в соответствие действительное число ($w_i > 0$ – вес вершины $i \in V$); $C:E \rightarrow R$ – весовая функция, которая каждому ребру ставит в соответствие действительное число ($c_{ij} > 0$ – вес ребра $(i,j) \in E$); $P:E \rightarrow (0,1]$ – весовая функция, которая каждому ставит в соответствие действительное число из полуинтервала $(0,1]$ ($0 < p_{ij} \leq 1$ – вероятность безотказной работы ребра $(i,j) \in E$).

Разбиение графа на подграфы означает представление исходного графа $G=(V,E)$ в виде множества подмножеств вершин (блоков) $V_1, V_2, ..., V_r$ ($r > 1$), таких, что $V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_r = V$, $V_k \cap V_l = \emptyset$, $k,l=1,...,r$, $k \neq l$.

Вершина $i \in V_k$, которая связана ребром с вершиной $j \in V_l$, $k \neq l$ называется **граничной вершиной**. Ребро, соединяющее вершины разных блоков, называются **ребром разреза**. Множество $E_{kl} = \{(i,j) \in E \mid i \in V_k, j \in V_l\}$ - множество ребер разреза между блоками V_k и V_l (некоторые из множеств E_{kl} могут быть пустыми), где V_k и V_l - множество E_{kl} которые называются кограницей блоков.

Множества E_{kl} далее будем называть **подразрезами**.

Подграфом G_k будем называть граф с множеством вершин V_k и множеством ребер $E_k = \{(i,j) \in E \mid i \in V_k, j \in V_k\}$, то есть $G_k = (V_k, E_k)$.

Качество разбиения графа может оцениваться по одному или нескольким критериям, которые являются функциями параметров подразезов E_{kl} , подмножеств $V_1, V_2, ..., V_r$ и/или подграфов $G_1, G_2, ..., G_r$:

$$\begin{aligned}\sum_{k < l} f(E_{kl}) &\rightarrow \min(\max), \\ \sum_{k=1}^p g(V_k) &\rightarrow \min(\max); \\ \sum_{k=1}^p h(G_k) &\rightarrow \min(\max).\end{aligned}$$

Возможны такие критерии оценки качества подразрезов, $f(E_{kl})$:

- суммарное количество ребер подразреза, $f(E_{kl}) = |E_{kl}|$;
- суммарный вес ребер подразреза (стоимость разреза), $f(E_{kl}) = \sum_{(i,j) \in E_{kl}} c_{ij}$;
- вероятность выхода из строя всех ребер подразреза $f(E_{kl}) = \prod_{(i,j) \in E_{kl}} (1 - p_{ij})$

(предполагается, что события «выход ребра из строя» являются независимыми);

- минимальная из вероятностей безотказной работы ребер подразреза $f(E_{kl}) = \min_{(i,j) \in E_{kl}} p_{ij}$;

– критерий, являющийся комбинацией параметров подразрезом, например сумма произведений весов ребер на вероятность выхода их из строя. $f(E_{kl}) = \sum_{(i,j) \in E_{kl}} c_{ij}(1 - p_{ij})$ (сводится к задаче разбиения с пересчитанной весовой функцией ребер).

Возможны такие критерии оценки качества получаемых подграфов $g(V_k)$, $h(G_k)$:

- плотность подграфа, $h(G_k) = \frac{2|E_k|}{|V_k|(|V_k| - 1)}$;

– максимальная из степеней вершин подграфа, $h(G_k) = \max_{i \in V_k} \{s_i\}$, где s_i – степень вершины $i \in V_k$ подграфа $G_k = (V_k, E_k)$;

– диаметр $d(G_k)$ подграфа $G_k = (V_k, E_k)$; диаметр графа (подграфа) – расстояние между двумя наиболее отдаленными вершинами в графе (подграфе);

– нарушение баланса между суммарными весами вершин подграфов (цель – найти такое разбиение, чтобы сумма весов вершин $g(V_k) = \sum_{i \in V_k} w_i$ в каждом подграфе были как можно близки друг к другу):

$$\max_{1 \leq k \leq r} \{g(V_k)\} - \min_{1 \leq k \leq r} \{g(V_k)\} \rightarrow \min;$$

- характеристики граничных вершин подграфов: $G_k = (V_k, E_k)$.

В задаче на получаемое решение также могут быть наложены некоторые ограничения (граничные условия), которые должны быть учтены при нахождении разбиения. К ним относятся ограничения (снизу и/или сверху) на следующие величины:

- количество подграфов разбиения;

- количество вершин, входящих в подграфы – так называемое *ограничение баланса*, согласно которому все подмножества $V_1, V_2, \dots, V_r$ должны иметь примерно одинаковый размер, точнее, это ограничение требует, чтобы $|V_k| \leq (1 + \varepsilon) \left\lceil \frac{|V|}{r} \right\rceil$ $k=1..r$ ($\varepsilon > 0$ - называется *параметром дисбаланса*);
- максимальный дисбаланс между количествами вершин подграфов разбиения $\max_k |V_k| / \left\lceil \frac{|V|}{r} \right\rceil$;
- суммарный вес вершин подграфов;
- размер дисбаланса между суммарными весами вершин подграфов;
- количество ребер, входящих в разрез;
- суммарный вес ребер разреза;
- вероятность выхода из строя всех ребер подразреза E_k ;
- среднее количество ребер входящих в подразрезы E_k ;
- средний вес ребер входящих в подразрезы E_k ;
- характеристики граничных вершин подграфов $G_k = (V_k, E_k)$:
 - степень d_i граничной вершины i ;
 - количество d_i^{cut} дуг, инцидентных граничной вершине i , входящих в подразрез;
 - вероятность выхода из строя «внутренних» и «внешних» ребер граничной вершины i .

Выводы. В работе предложен способ разбиения сети на зоны маршрутизации. Предложены и определены критерии оценки качества подразрезов сети, также наложены некоторые ограничения (граничные условия), которые должны быть учтены при нахождении разбиения.

Список использованной литературы.

1. Muhammed Fatih Talu. (2017, September) Multi-level spectral graph partitioning method . Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, (Volume 2017, pp. 5-11).
2. Dominique Lasalle, George Karypis (2013). Multi-threaded Graph Partitioning. Proceedings of the 2013 IEEE 27th International Symposium on Parallel and Distributed Processing (IPDPS '13) (pp. 225-236).
3. George Karypis, Vipin Kumar. (1998, November 07 - 13) Multilevel algorithms for multi-constraint graph partitioning. Proceedings of the 1998 ACM/IEEE conference on Supercomputing. (SC '98) (Pp. 1-13).

ДОВІДКА ПРО АВТОРІВ

Кулаков Олексій Юрійович – професор, кафедра обчислювальної техніки, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського».

Kulakov Yurii – professor, Department of Computer Engineering, National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”.

E-mail: ya.kulakov@gmail.com

Коган Алла Вікторівна – старший викладач, кафедра автоматизованих систем обробки інформації і управління, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського».

Kohan Alla - Senior lecturer, Department of Computer-Aided Management And Data Processing Systems, National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”.

E-mail: a.v.kohan433@gmail.com

Сперкач Майя Олегівна - старший викладач, кафедра автоматизованих систем обробки інформації і управління, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського».

Sperkach Maiia - Senior lecturer, Department of Computer-Aided Management And Data Processing Systems, National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”.

E-mail: sperkachmaya@gmail.com

Жданова Олена Григорівна – доцент, кафедра автоматизованих систем обробки інформації і управління, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського».

Zhdanova Olena- associate professor, Department of Computer-Aided Management And Data Processing Systems, National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”.

E-mail: zhdanova.elena@hotmail.com

Elena Zhdanova,
Alla Kohan,
Yurii Kulakov,
Maya Sperkach

ON THE PARTITION OF THE GRAPH INTO SUBGRAPHS

Relevance of research topic. The task of distributing the graph to smaller podgraphs was relevant many years ago and today is relevant in connection with the constant change in technology associated with the organization of computer networks. The task of distributing graphs to pieces in conventional networks is of the same nature, and when organizing the same process on the network there are many difficulties that need to be addressed.

The posing of problems. There is a need to break up the wireless computer network into routing zones in order to reduce the time of designing traffic and to form a multitude of paths for transferring information.

Analysis of recent research and publications. In recent years, the issue associated with the organization of the computer network sdn is of great interest, as it gives many opportunities in solving this problem.

Isolation of unexplored parts of a common problem. In the considered ways of partitioning a graph into subgraphs, there are no criteria for estimating the quality of subdivisions.

Formulation of the problem. The task is to partition the sdn network into the routing area, so that the minimization of the boundary cut is considered as a goal, and the requirement that the cuts have the same size can be considered as a limitation.

Presentation of the main material. The analysis of the methods of network splitting into zones is carried out and the relative criteria and difficulties are revealed. It is proposed to establish certain quality criteria for the breakdown of the graph. They can be evaluated according to one or more criteria, which are functions of the parameters of sub-divisions E_H , subsets $V_1, V_2, \dots, V_r$ and / or subgraphs $G_1, G_2, \dots, G_r$.

Conclusions. The method of splitting the network into routing zones is proposed. Proposed and defined criteria for assessing the quality of sub-divisions, also imposed some restrictions (boundary conditions), which must be taken into account when finding a partition.

Keywords: graph, section of graph, subgraph, partition of graph.